Les nombres Heureux et Malheureux

année 2012

Élèves : 2de
DURIVAUX Charles
MARTIN Ségolène
RISSON Emmanuelle
RUMIN Sophie

Enseignants :
M. MISSENARD
M. GABILLY
M. JULLIOT

Chercheurs :
BRAULT Vincent
BURQ Nicolas

Établissement :
Lycée Blaise Pascal
18 à 20 rue Alexander Fleming
91401 ORSAY Cedex

Un nombre, **n**, est dit « heureux » si et seulement s'il existe deux entiers strictement positifs **a** et **b** tels que :

a + b = n
a x **b = n** x **k** (1)

Tout nombre non heureux est malheureux.

Par exemple, on choisit le nombre 9
3 + 6 = 9
3 x 6 = 18
18 est divisible par 9, nombre de départ.
Donc 9 est heureux.
De même, 12 est heureux :
6 + 6 = 12
6 x 6 = 36
36 est divisible par 12.

Prenons des exemples de nombres malheureux :
On choisit le nombre 3.
1 + 2 = 3
1 x 2 = 2
2 n'est pas divisible par 3,
3 est malheureux.
De même, 5 est malheureux :
Nous avons testé toutes les possibilités qui sont les suivantes :

1 + 4 = 5	2 + 3 = 5
1 x 4 = 4	2 x 3 = 6

Ni 4 ni 6 ne sont divisibles par 5, donc 5 est malheureux.

Quels sont donc les nombres heureux ?

Nous avons étudié une série de nombres allant de 1 à 40, et remarqué que les nombres carrés d'entiers étaient tous heureux. Par exemple, le nombre 9 est heureux :

$9 = 3^2$
$3^2 = \underbrace{3}_{a} + \underbrace{(3^2 - 3)}_{b}$
$a \text{ x } b = 3 \text{ x } (3^2 - 3)$
$\quad = 3^2 \text{ x } (3 - 1)$

Nous avons réussi à le démontrer :
On définit $\mathbf{n = d^2}$
$\mathbf{a + b = d^2}$
On prend $\mathbf{a = d}$ et $\mathbf{b = d^2 - d}$
$\mathbf{a + b = d + (d^2 - d) = d^2}$
$\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b = d} \text{ x } \mathbf{(d^2 - d)}$
$\quad \mathbf{= d^2} \text{ x } \mathbf{(d - 1)}$
$\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b = n} \text{ x } \mathbf{k}$ avec k entier (d-1)
Remarque : d ≠ 1 car n ≠ 1 (car a ≠ 0 et b ≠ 0 et a + b = n)

De même , les multiples de nombres carrés sont heureux.
On note $\mathbf{n = q} \text{ x } \mathbf{d^2}$
D'où $\mathbf{a + b = q} \text{ x } \mathbf{d^2}$
On choisit $\mathbf{a = q \text{ x } d}$ et $\mathbf{b = q\ (d^2 - d)}$
$\mathbf{a + b = (q \text{ x } d) + q\ (d^2 - d) = q} \text{ x } \mathbf{d^2 = n}$
$\mathbf{a} \text{ x } \mathbf{b = q} \text{ x } \mathbf{d} \text{ x } \mathbf{q\ (d^2 - d)}$
$\quad \mathbf{= q} \text{ x } \mathbf{d} \text{ x } \mathbf{(q} \text{ x } \mathbf{d^2 - q} \text{ x } \mathbf{d)}$
$\quad \mathbf{=} \underbrace{\mathbf{q} \text{ x } \mathbf{d^2}}_{\mathbf{n}} \text{ x } \underbrace{\mathbf{(q} \text{ x } \mathbf{d - q)}}_{\mathbf{k}}$

On a donc démontré que les nombres carrés et multiples de carrés sont heureux.

Nous avons ensuite étudié les nombres malheureux et nous avons remarqué que les nombres premiers sont malheureux. Par exemple, 3, 5, 7.. sont malheureux.

Nous avons réussi à le démontrer à l'aide de la décomposition en facteurs premiers.
Rappel : (2)
http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_premier]
Tout nombre peut se décomposer en produit de nombres premiers.
Par exemple : 12 se décompose en : $3 \text{ x } 2^2$.
Démontrons que les nombres premiers sont malheureux :
On définit **n = p** où **p** est un nombre premier

a + **b** = **p** (3)
d'où **a<p** et **b<p**
p x **k** = **a** x **b**
p divise **a** x **b**
Il ne divise ni **a**, ni **b** car **a<p** et **b<p**
Donc il ne divise pas **a x b**, c'est absurde.
Donc les nombres premiers sont malheureux.

Nous avons ensuite remarqué que tout nombre produit de nombres premiers différents est malheureux.
Démontrons-le:
Soit **n** = p_1 x p_2
D'où **a** x **b** = p_1 x p_2 x **k** (4)
Donc p_1 divise **a** ou p_1 divise **b** (car p_1 est premier),
Démonstration par l'absurde : on admet p_1 divise **a**, c'est-à-dire **a** = p_1 x f_1, avec f_1 un facteur quelconque.

a + b = p_1 **x** p_2
<=> p_1 **x** f_1 **+ b =** p_1 **x** p_2
<=> **b =** p_1 **(**$p_2 - f_1$**)**
p_1 **divise b** <=> **b =** p_1 **x** f_2
Revenons à :
a x b = p_1 **x** p_2
<=> p_1 **x** f_1 **x** p_1 **x** f_2 **=** p_1 **x** p_2 **x k**
Donc **a** < p_1 **x** p_2 <=> p_1 **x** f_1 < p_1 **x** p_2
Donc $p_2 > f_1$
et de même $p_2 > f_2$
Donc p_2 ne se trouve pas dans la décomposition en facteurs premiers ni de f_1 ni de f_2 donc ni dans **a** ni dans **b**.
Donc p_2 ne divise pas **a x b**
ABSURDE ! (5)

En conclusion, tout nombre est heureux s'il est le multiple d'un carré. Tout nombre est malheureux s'il est le produit de nombres premiers tous différents.
Être heureux ou malheureux dépend de la décomposition en facteurs premiers du nombre. (6)

Élargissement du problème

Nous avons remarqué que l'on peut écrire **n** sous la forme **n** = **s**² x **t**.
Dans **s**, on regroupe tous les nombres carrés présents dans la décomposition en facteurs premiers de **n** ; **t** est donc un multiple de nombres premiers tous différents.
Exemple :
le nombre : 2 x 2 x 3 x 5 x 5 x 5 x 7 peut donc se regrouper en : $\underbrace{(2 \text{ x } 5)^2}_{\mathbf{s}}$ x $\underbrace{(3 \text{ x } 5 \text{ x } 7)}_{\mathbf{t}}$

Nous avons aussi remarqué que certains nombres sont plusieurs fois heureux.
Par exemple, pour 16, il existe deux possibilités de **a** et de **b** qui peuvent rendre ce nombre heureux.

- 8 + 8 = 16 8 x 8 = 16 x 4
- 4 + 12 = 16 4 x 12 = 16 x 3

Nous avons créé une fonction donnant le nombre **m** de fois qu'un nombre est heureux.
Nous en avons obtenu le graphique ci-dessous qui représente : en abscisse, les nombres **n** de 1 à 5000, et en ordonnée, le nombre **m** de possibilités pour le couple **a** et **b**. (7)
Nous avons compté comme deux couples différents « **a** et **b** » et « **b** et **a** » (par exemple : **a=4** et **b=12**, et **a=12** et **b=4**).
On remarque des séries de pics, dont la première survient aux nombres carrés, la seconde aux doubles de nombres carrés, etc.
Avec un programme, nous avons remarqué que les possibilités de **a** progressaient de **s** x **t** en **s** x **t**. Ce tableau représente les possibilités de a et b d'après cette conjecture : (8)

a	**b**
s x t	n – s x t
2 x s x t	n – 2 x s x t
3 x s x t	n – 3 x s x t
…	...
(s – 1) x s x t	n – a
s x s x t	0

La dernière possibilité n'est pas à prendre en compte (**b** doit être strictement positif).
Le nombre de possibilités de couples **a** et **b** est donc de **s – 1**. Donc **m = s – 1**.
Or $s=\sqrt{s^2}$
Donc si **n** est un nombre carré **(n=s²)**,

$$m=\sqrt{s^2}-1$$
$$m=\sqrt{n}-1$$

Donc la courbe des pics pour les nombres carrés correspond à la racine carrée du nombre,moins 1.

Et pour les nombres multiples de carrés ?

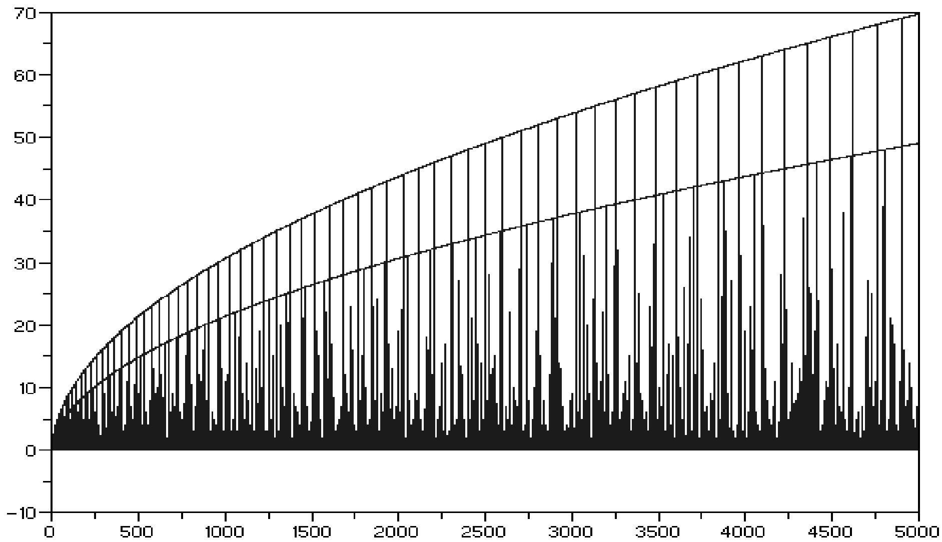
$$m = s - 1$$

$$m = \sqrt{s^2} - 1$$

$$m = \frac{\sqrt{s^2} * \sqrt{t}}{\sqrt{t}} - 1$$

$$m = \frac{\sqrt{(s^2 * t)}}{\sqrt{t}} - 1 \qquad m = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{t}} - 1$$

Donc le nombre de fois qu'un nombre n est heureux est : la racine de **n** divisé par la racine de **t** , moins **1**.
La deuxième série de pics apparaît donc aux nombres pour lesquels **t = 2** (plus petit nombre premier).



Notes d'édition

(1) On peut remarquer que si n est heureux, $n \rangle 1$ puisque a et b, de somme n, sont strictement positifs

(2) Un nombre premier est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts entiers et positifs (qui sont alors 1 et lui-même). Cette définition exclut 1, qui n'a qu'un seul diviseur entier positif ; elle exclut aussi 0, qui est divisible par tous les entiers positifs.

(3) si n est heureux il existe alors 2 entiers a et b strictement positifs tels que a+b = p et ab = kp

(4) Ici commence le " raisonnement par l'absurde " : si n est heureux, il existe a et b stictement positifs tels que a+b = p et ab=k $p_1 p_2$

(5) C'est absurde car c'est en contradiction avec l'hypothèse de départ : ab = k $p_1 p_2$.

(6) Ce qui a été démontré : tout nombre multiple d'un carré est heureux et tout nombre produit de nombres premiers tous différents est malheureux. Or si on décompose un entier naturel en facteurs premiers, on s'aperçoit que soit il s'écrit sous forme d'un multiple de carrés, soit il s'écrit sous forme d'un produit de nombres premiers tous différents (voir l'exemple donné dans le paragraphe : élargissement du problème). cette remarque permet d'énoncer la conclusion.

(7) Quelle méthode a été employée pour créer cette fonction?

(8) Les valeurs de a varient de st en st : est-ce une hypothèse ?